Formation MATLAB & Calcul Scientifique

Résolution des équations nonlinéaires
et
Schémas d'Euler pour la résolution des EDO

présenté par :

Mohamed Khaled GDOURA

Uni. de Carthage - ISSAT Mateur

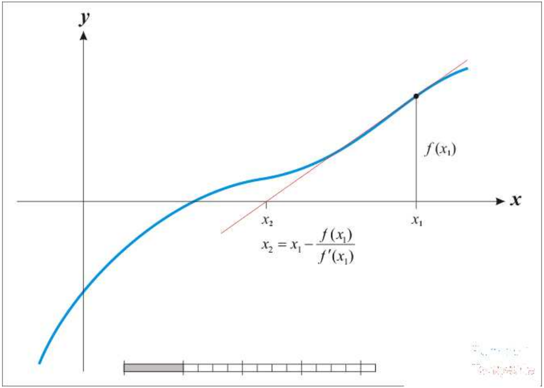
Enit, 12 Mars 2015

Plan

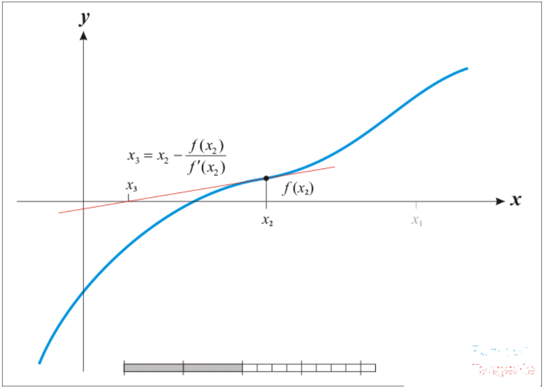
1. Motivations
2. Méthode de Newton
   - Algorithme et implémentation.
   - Convergnce et Ordre de convergnce.
   - Choix de x_0.
3. Schémas de résolution numérique des EDO
   - Schéma d'Euler explicite.
   - Ordre de convergnce.
   - Stabilité.
   - Cas test.
   - Erreur d'arrondis
   - Schémas implicites

Motivations

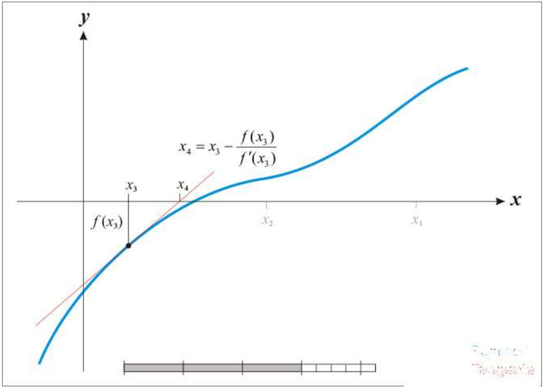
1. Concrétiser le savoir acquis durant les séances précédentes.
2. Ecrire des scripts Matlab pour résoudre numériquement : $f(x) = 0$ et EDO.
3. Etudier les perfomances des méthodes utilisées.



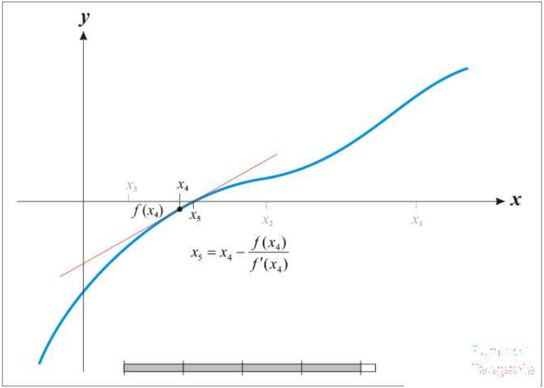
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$



$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geq 0$$

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n)$

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n)$

$\longrightarrow$ Arrêt des itérations

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n)$

$\longrightarrow$ Arrêt des itérations

$\longrightarrow$ Choix de x_0

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n) = \dfrac{1 + x_n^2}{2x_n}$.

$\longrightarrow$ Arrêt des itérations

$\longrightarrow$ Choix de x_0

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n) = \dfrac{1 + x_n^2}{2x_n}$.

$\longrightarrow$ Arrêt des itérations : $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

$\longrightarrow$ Choix de x_0

Résoudre à l'aide de la méthode de Newton l'équation :

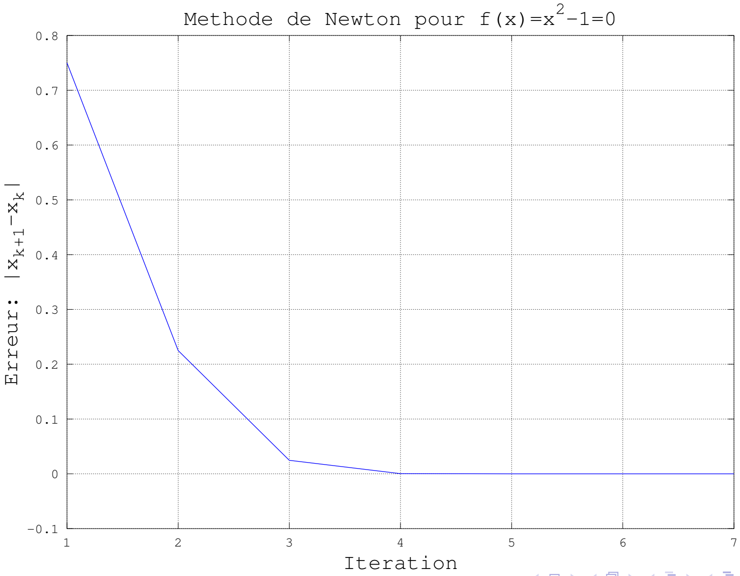
$$f(\alpha) = 0 \text{ avec } f(x) = x^2 - 1.$$

$\longrightarrow$ $x_{n+1} = \Phi(x_n) = \dfrac{1 + x_n^2}{2x_n}$.

$\longrightarrow$ Arrêt des itérations : $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

$\longrightarrow$ Choix de x_0 : $x_0 \in I$ tel que $|\Phi(x)| < 1 \ \forall x \in I$ avec $\alpha \in I$.

```
function [alpha,err,nit]=newton(f,df,toll,x0,nmax)
%-- Initialization
  nit=0 ;
  err=toll+1 ;
  x=x0 ;
while((nit<=nmax & err>toll))
   fx=f(x) ; dfx=df(x) ;
%
   if (abs(dfx)<toll)
     disp('vanishing derivative')
     break
   else
     nit=nit+1 ;
     xn=x-fx/dfx ;
     err=abs(xn-x) ;
     x=xn ;
   end
end
%
alpha=x ;
```



Methode de Newton pour f(x)=x^2-1=0
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
1
2
3
4
5
6
7
Erreur: |x_{k+1}-x_k|
Iteration

Méthode d'ordre $p \Leftrightarrow \ |x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^p$

p mesure le vitesse de convergnce de la méthode de résolution.

Dans la pratique : $\dfrac{log(|x_{n+1} - \alpha|)}{log(|x_n - \alpha|)} \xrightarrow{+\infty} p$

$$\hookrightarrow \frac{log(|x_{n+1} - \alpha|)}{log(|x_n - \alpha|)} \quad = \quad \begin{bmatrix} 2.0000 \\ 2.6610 \\ 2.1946 \\ 2.0857 \\ 2.0394 \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ $x_0 > 0 \;\Rightarrow\; x_n \xrightarrow{+\infty} \alpha = 1.$

$\longrightarrow$ $x_0 < 0 \;\Rightarrow\; x_n \xrightarrow{+\infty} \alpha = -1.$

$\longrightarrow$ $x_0 = 0 \;\Rightarrow$ pas de convergnce car $f'(0) = 0.$

$\longrightarrow$ $x_0 \longrightarrow 0^+ \;\Rightarrow$ convergence lente.

- $x_0 = 0.1 \;\Rightarrow$ nit$= 7.$
- $x_0 = 10^{-6} \;\Rightarrow$ nit$= 24.$
- $x_0 = 10^{-15} \;\Rightarrow$ nit$= 54$

Problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{ll} y'(t) = f(t,y) & t \in [0,T]. \\ y(0) = y_0. \end{array}\right.$$

Sch. d'Euler explicite

$$\left\{\begin{array}{ll} y_{n+1} = y_n + \delta t\ f(t_n, y_n) & 0 \leq n \leq N = T/\delta t. \\ y(0) = y_0. \end{array}\right.$$

δt : pas de temps.

Exemple

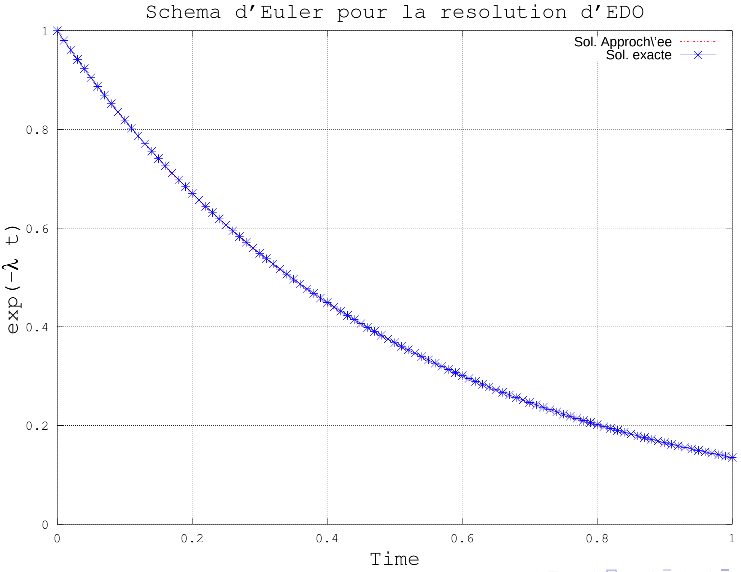
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) & t \in [0,1]. \\ y(0) = 1. \end{cases} \Longrightarrow y(t) = y_0\, e^{\lambda t} \text{ Solution exacte.}$$

Schéma d'Euler :

$$y_{n+1} = (1 + \delta t \lambda) y_n, n \geq 0.$$

- Ecrire le code.
- Tracer sur la même courbe $y(t)$ et $(t_n, y_n)_{0 \leq n \leq N}$.

```
function [ysol]=eulerex(T0,T,h,f,y0)
n=fix((T-T0)/h) ;
ysol=[y0] ;
yn=y0 ;
for i=0 :n-1
   tn=T0+i*h ;
   yn1=yn+h*f(tn,yn) ;
   ysol=[ysol yn1] ;
yn=yn1 ;
endfor
```



Schema d'Euler pour la resolution d'EDO
Sol. Approch\'ee
Sol. exacte
exp(−λ t)
Time
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

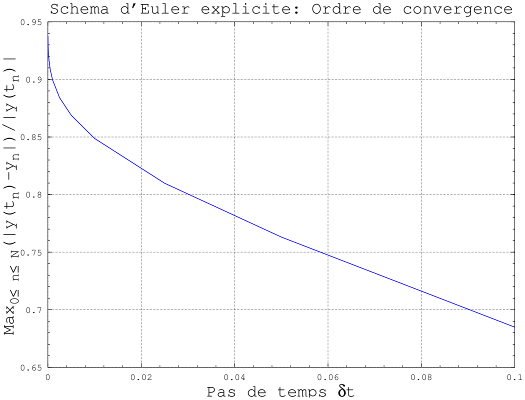
Définition

Une méthode est dite d'ordre p, $(p > 0)$, s'il existe $C > 0$, tel que :

$$\max_{0 \leq n \leq N-1} |y(t_{n+1}) - y(t_n) - \delta t f(t_n, y_n)| \leq C \, \delta t^p$$

- Erreur relative : $er_n = \dfrac{|y(t_n) - y_n|}{|y(t_n)|}$
- Tracer $\max\limits_{0 \leq n \leq N-1} er_n$ Vs δt.
- $p =?$

δt	Erreur	Ordre
1.0000e-01	2.0661e-01	6.8486e-01
5.0000e-02	1.0166e-01	7.6312e-01
2.5000e-02	5.0416e-02	8.0985e-01
1.0000e-02	2.0067e-02	8.4876e-01
5.0000e-03	1.0017e-02	8.6886e-01
2.5000e-03	5.0042e-03	8.8417e-01
1.0000e-03	2.0007e-03	8.9961e-01
5.0000e-04	1.0002e-03	9.0879e-01
2.5000e-04	5.0004e-04	9.1642e-01
1.0000e-04	2.0001e-04	9.2474e-01
5.0000e-05	1.0000e-04	9.3001e-01
2.5000e-05	5.0000e-05	9.3459e-01
1.5000e-05	3.0000e-05	9.3760e-01



$$\frac{log(\text{Erreur})}{log(\delta t)} \xrightarrow{\delta t \to 0} 1 \quad \Rightarrow \text{ L'ordre de convergence est } p = 1.$$

Exemple

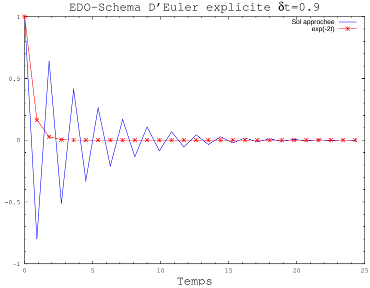
$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \quad t \in [0, T]. \\ y(0) = y_0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{n+1} = (1 + \delta t \lambda) y_n, 0 \leq n \leq N. \\ y_0 \text{ donnée.} \end{cases}$$

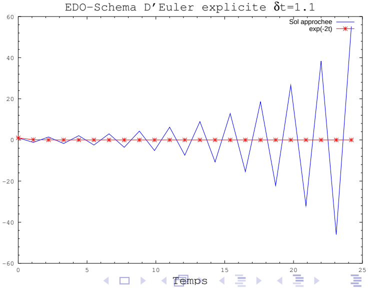
- On suppose : T=25, $\lambda = -2$, $y_0 = 1$.
- Tracer la courbe de $y(t)$ et (t_n, y_n) pour $\delta t = 0.9$ (à gauche cas stable) et 1.1 (à droite cas instable).

Exemple

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t) \quad t \in [0,T]. \\ y(0) = y_0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_{n+1} = (1+\delta t \lambda) y_n, 0 \leq n \leq N. \\ y_0 \text{ donnée.} \end{cases}$$

- On suppose : T=25, $\lambda = -2$, $y_0 = 1$.
- Tracer la courbe de $y(t)$ et (t_n, y_n) pour $\delta t = 0.9$ (à gauche cas stable) et 1.1 (à droite cas instable).





Condition de stabilité

$$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1} = (1+\delta t\lambda) y_n, 0 \leq n \leq N. \\ y_0 \text{ donnée.} \end{array}\right. \longrightarrow \quad y_n = (1+\delta t\lambda)^n y_0$$

Schéma stable si $|1+\lambda\,\delta t| < 1 \Rightarrow \delta t < \frac{2}{|\lambda|}$

Stabilité : Définition

$$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \delta t\ f(t_n, y_n). \\ y(0) = y_0. \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} z_{n+1} = z_n + \delta t\ (f(t_n, z_n) + \zeta_n) \\ z(0) = z_0 = y_0 + \zeta_0. \end{array}\right.$$

Schéma stable $\Leftrightarrow \exists\ C > 0$ ind. de δt, tel que $\max_n |y_n - z_n| \leq C_N \max_n |\zeta_n|$

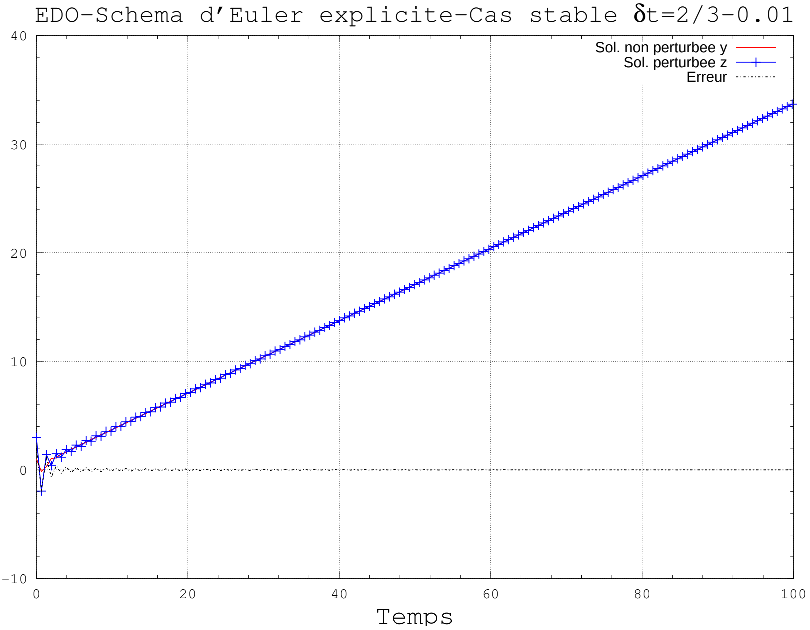
Schéma absolument stable $\Leftrightarrow C_N \xrightarrow{+\infty} 0$

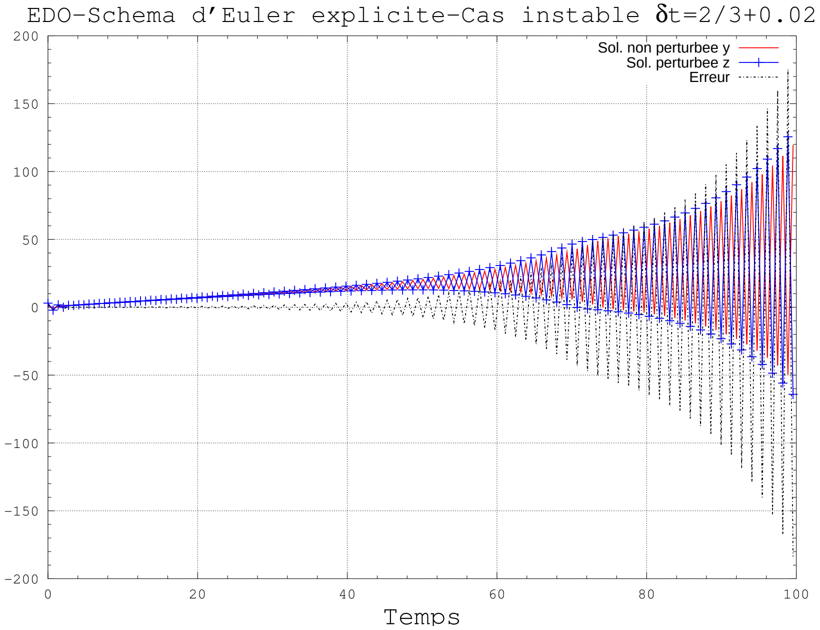
Stabilité absolue : Exemple

Soient :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \delta t\ f(t_n, y_n). \\ y(0) = y_0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} z_{n+1} = z_n + \delta t\ (f(t_n, z_n) + \zeta_n) \\ z(0) = z_0 = y_0 + \zeta_0. \end{cases}$$

- $f(t, y) = \arctan(3y) - 3y + t$, T=100, $y_0 = 1$ et $\zeta_0 = 3$.
- Pour $\delta t = \frac{2}{3} - 0.01,\ \frac{2}{3} + 0.02$, Tracer : $y(t)$, $z(t)$ et $e(t) = z(t) - y(t)$.

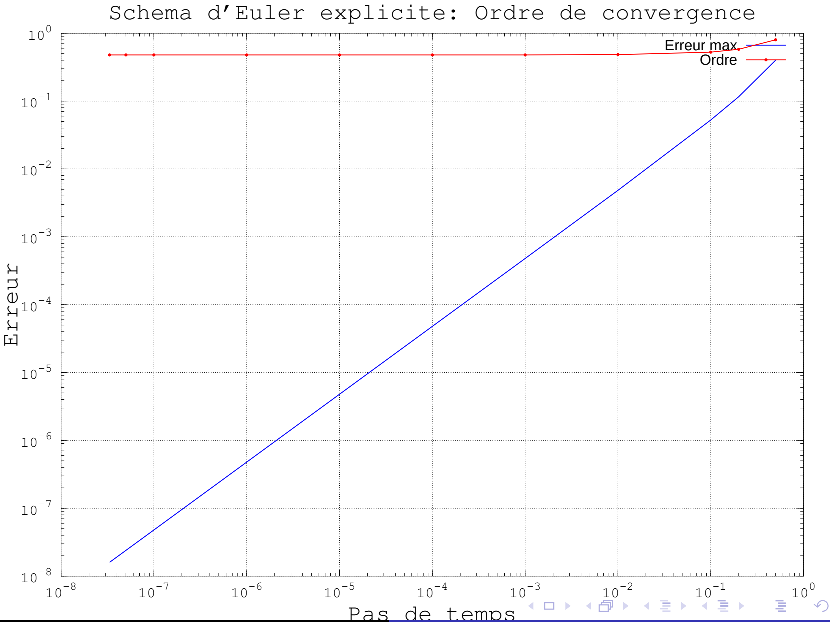

EDO-Schema d'Euler explicite-Cas stable δt=2/3-0.01
Sol. non perturbee y
Sol. perturbee z
Erreur
40
30
20
10
0
-10
0
20
40
60
80
100
Temps


EDO-Schema d'Euler explicite-Cas instable δt=2/3+0.02
Sol. non perturbee y
Sol. perturbee z
Erreur
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
0
20
40
60
80
100
Temps

Exemple

$$\begin{cases} y(t)' = -2\,t\,y(t)^2, \\ y(0) = 2. \end{cases} \longrightarrow \quad y(t) = \frac{2}{2\,t^2+1}$$

- Tracer $err(\delta t)$ pour le schéma d'Euler explicite, $\delta t \in [10^{-8}, 0.1]$.
- Refaire le travail pour des variables **simple précision**.
- Interpréter.


Schema d'Euler explicite: Ordre de convergence
Erreur max
Ordre
Erreur
Pas de temps
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}

$$|y(t_N) - y_N^*| \leq a + b\,\delta t + \frac{c}{\delta t}.$$

Problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,t\,y^2 \quad t \in [0, T]. \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Resoudre cette équation à l'aide du :

- Sch. d'Euler implicite :

$$y_{n+1} = y_n + \delta t\, f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n \geq 0.$$

- Sch. de Crank-Nikolson :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\delta t}{2}\left(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)\right), \quad n \geq 0.$$

Sch. d'Euler implicite : $y_{n+1} = y_n + \delta t\, f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n \geq 0.$

```
T0=0 ; T=1 ;h=.01 ;y0=2 ;
f=@(t,y) -2*t*y**2 ;
n=fix((T-T0)/h) ;
yn=y0 ; ysol=[y0]
for i=0 :n-1
  tn=T0+i*h ;
  g=@(y) h*f(tn+h,y)-y+yn ;
  dg=@(y) h*(-4*(tn+h)*y)-1 ;
  [yn1,e,nit]=newton(g,dg,10^-8,yn,20) ;
  endif
  ysol=[ysol yn1] ;
  yn=yn1 ;
end
t=[T0 :h :T] ; yex=2./(1+2*t.**2) ;
err=abs((yex-ysol)./yex) ;
emax=max(err) ; [h emax]
```

$\rightsquigarrow$ Changer g(y) et dg(y) pour le sch. de Crank-Nikolson ☺.

Bibliographie

- M. Crouzeix, A.L. Mignot : *Analyse numériques des équations différentièlles*, Masson, Paris 1992.
- J.P. Dedeiu : *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri : *Numerical Mathematics*, Springer, New York, 2000.
- A. Quarteroni, F. Saleri :*Scientific computing with MATLAB and Octave*, Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- *Wikipedia : The online encyclopedia*, www.wikipedia.org.